

## شروط المسافة :

- ①  $d(x, y) \geq 0$
- ②  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- ③  $d(x, y) = d(y, x)$
- ④  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

نسمي المجموعة  $X$  مع المسافة  $d$  بالمسافة المترية  $(X, d)$   
 الكرة المفتوحة والكرة المغلقة و سطح الكرة :

ليكن  $(X, d)$  فضاء مترية ولنعرف عليه المجموعات التالية :

**A**  $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$

نسمي  $B(x, r)$  كرة مفتوحة مركزها  $a$  ونصف قطرها  $r$ .

**B**  $\bar{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$

نسمي  $\bar{B}(x, r)$  كرة مغلقة مركزها  $a$  ونصف قطرها  $r$ .

**C**  $S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) = r\}$

نسمي  $S(a, r)$  سطح الكرة التي مركزها  $a$  ونصف قطرها  $r$ .

المسافة المترية المنقطع :

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{و } x \neq y \\ 0 & \text{و } x = y \end{cases}$$

يعتبر هذا المسافة بالشكل :

ونتحقق في هذا المسافة :

$$\forall x \in X \text{ و } B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$$

النقطة الداخلية للمجموعة :

ليكن  $(X, d)$  فضاءاً مترياً و  $A \subseteq X$  حيث  $A$  مجموعة جزئية من  $X$  و  $a \in A$ .

نسمي النقطة  $a$  نقطة داخلية للمجموعة  $A$  إذا وجدت كرة مفتوحة  $B(a, r)$  حيث يكون  $B(a, r) \subseteq A$ .

★ إن مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة  $A$  نسميها داخلية  $A^\circ$  ويرمز لها  $A^\circ$ .

★  $X^\circ = X$  ,  $\emptyset^\circ = \emptyset$  ,  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

★ لايجاد داخلية مجموعة ما نفتح كل المجالات ونعرف النقاط المنعزلة في المجموعة.

★  $A^\circ \subseteq A$  المجموعة  $A$  دوماً تحوي داخليتها.

★ لايجاد داخلية مجموعة في فضاء مترية  $(A, d)$  :

① إذا وجدت نقاط منعزلة في المجموعة تبقى النقاط التي هي بالأصل منعزلة في الفضاء الجزئي ونعرف باقي النقاط المنعزلة.

② نفتح كل المجالات ونعيد إغلاق كل طرف مغلق في الفضاء

## المجموعات المفتوحة :

نقول عن المجموعة الجزئية  $A$  من الفضاء المترى  $X$  مجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية

أي إذا كان  $A = A^\circ$

★ أي اجتماع لكرات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة « اجتماع أي أسرة من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة »

★ في أي فضاء مترى  $\emptyset, X$  مفتوحتان

★ أي كرة مفتوحة في الفضاء المترى هي مجموعة مفتوحة

★ تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة

★ داخلية المجموعة  $A$  هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في  $A$

## المجموعات المغلقة :

نسمي المجموعة  $F$  من الفضاء المترى  $X$  مجموعة مغلقة إذا كانت متممة  $X \setminus F$  مفتوحة :

★ تكون المجموعة  $F$  مغلقة إذا وصفت إذا كانت متممة مفتوحة

★ تكون المجموعة  $F$  مفتوحة إذا وصفت إذا كانت متممة مغلقة

★ أي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة

★ اجتماع عدد منته من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

★ في أي فضاء مترى  $\emptyset, X$  مغلقتان

★ أي مجال مغلق في الفضاء الحقيقي المألف هو مجموعة مغلقة

## الجوار :

تعريف 1 : ليكن  $(X, d)$  فضاء مترى و  $a \in X$  نسمي المجموعة الجزئية  $G$  من  $X$  جواراً لـ  $a$  إذا وجدت

كرة  $B(x, r)$  بحيث يكون  $B(x, r) \subseteq G$

تعريف 2 : نقول عن المجموعة  $G$  أنها جوار للنقطة  $a$  إذا وجدت مجموعة مفتوحة مثل  $U$  بحيث

$$a \in U \subseteq G$$

تعريف 3 : يكون  $a$  جواراً لـ  $a$  إذا كانت جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منته منها محتوي في  $G$

★ تكون المجموعة  $A$  مفتوحة إذا وصفت إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها

★ تقاطع عدد منته من جوارات النقطة هو جوار لهذه النقطة

★ إن كل نقطة تنتمي لجواراتها

★ إن ما يحوي الجوار هو أيضاً جوار أي إذا كان  $a \in G$  و  $a \in G$   $\Rightarrow$  جواراً لـ  $a$

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$$

/ /

لصيقة مجموعة:

نقول عن  $x \in (X, d)$  انها نقطة ملاصقة بالمجموعة  $A \subseteq (X, d)$  إذا كانت أي كرة  $B(x, r)$  تتقاطع مع  $A$ .

★ مجموعة النقاط الملاصقة لـ  $A$  نسميها لصيقة  $A$  ونرمز لها بـ  $\bar{A}$

★  $\bar{A}$  هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي  $A$

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$$

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \text{توجد متتالية من عناصر } A \text{ وتقاربة من } x$$

$$\bar{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{X} = X, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

★ تكون المجموعة  $A$  مغلقة إذا وفقط إذا كانت تساوي لصقتها  $A = \bar{A}$

$$\text{إذا كانت } x \in A \text{ فإن } x \in \bar{A} \Leftrightarrow A \subseteq \bar{A}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$$

★  $\bar{A}$  تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحوي  $A$ .

★ نسمي المجموعة الجزئية  $A$  من الفضاء المترى  $X$  مجموعة كثيفة إذا كانت لصقتها تساوي الفضاء كله  $\bar{A} = X$

★ نقول عن فضاء مترى أنه متصل « قابل للقطع » إذا كان يحوي مجموعة كثيفة وقابلة للعد

★ في الفضاء الحقيقي المألف  $(\mathbb{R}, d)$  حيث  $d$  هي المسافة المألوفة، لإيجاد مجموعة مكثفة من اجتماع محالات ونقاط متعزلة نقوم بإغلاق كل المحالات ونترك النقاط المنعزلة مع اللصيقة.

★ إذا كان لدينا فضاءاً جزئياً من  $\mathbb{R}$  يحوي محالات ونقوى نقاط منعزلة لإيجاد لصيقة مجموعة نعلق جميع

المحالات ونضيف فتح كل طرف محال مفتوح في المجموعة ومنه الفضاء ونبقى بكل النقاط المنعزلة سواء كانت

من الفضاء أو من غير الفضاء.

$$\bar{A} = A' \cup A$$

$$x \in A^\circ \Leftrightarrow x \in \bar{A}$$

$$A^\circ = x \in \bar{A}$$

$$(x \in A)^\circ = x \in \bar{A}$$

مشتقة مجموعة:

نقول عن النقطة  $x \in (X, d)$  أنها نقطة تراكم للمجموعة  $A \subseteq (X, d)$  إذا أي جوار يتقاطع مع  $A$  بنقاط مختلفة عن  $x$

★ مجموعة نقاط التراكم للمجموعة  $A$  نعرفها مشتقة  $A$  ونرمز لها بـ  $A'$

$$A' = \bar{A} \setminus A$$

★  $x \in A' \Leftrightarrow$  أي كرة مركزها  $x$  تحوي عدد غير منته من عناصر  $A$

★  $x \in A' \Leftrightarrow$  توجد متتالية عناصرها من  $x \in A$  وتقاربة من  $x$

★  $A' \subseteq A$  مغلقة إذا وفقط إذا كانت تحوي مشتقتها  $A' \subseteq A$

★ أي نقطة تراكم هي نقطة لاصقة.

## خارجية مجموعة

نقول عن النقطة  $x$  أنها نقطة خارجية بالنسبة لـ  $A \subseteq (X, d)$  إذا كانت  $x$  داخلية في  $X \setminus A$ .

★ مجموعة النقاط الخارجية لـ  $A$  نسميها خارجية  $A$  ويرمز لها بـ  $Ext(A)$  أي أن خارجية المجموعة  $A$  هي داخلية المتممة  $(X \setminus A)^\circ$ .

$$Ext(A) = X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^\circ \quad \star$$

حدود مجموعة «محيط مجموعة»:

نقول عن نقطة  $x$  أنها نقطة جبرية للمجموعة  $A$  إذا كانت كل كرة مركزها  $x$  تقاطع مع مجموعة  $A$ .

★ مجموعة النقاط الجبرية لـ  $A$  نسميها محيط أو حدود  $A$  ويرمز لها بـ  $F_r(A)$ .

$$F_r(A) = \overline{A} \setminus A = F_r(X \setminus A) \quad \star$$

$$F_r(A) = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A}) \quad \star$$

$$F_r(A) = \bar{A} \setminus A^\circ \quad \star$$

$$F_r(A) \subseteq A \Leftrightarrow A \text{ مغلقة} \quad \star$$

$$F_r(A) \subseteq X \setminus A \Leftrightarrow A \text{ مفتوحة} \quad \star$$

المجموعات  $Q$

$$Q^\circ = \emptyset$$

$$\bar{Q} = \mathbb{R}$$

$$Q' = \mathbb{R}$$

$$Ext(Q) = \emptyset$$

$$F_r(Q) = \mathbb{R}$$

المجموعات  $Q$  هي كائنة  
بأنها لا تحتوي على أي نقطة داخلية  
لأنها ممتدة على كامل الخط الحقيقي

$$R^\circ = R$$

$R$  مجموعة مغلقة

$R$  مغلقة لأن كل نقطة في  $R$  هي نقطة داخلية

$$Z^\circ = \emptyset$$

$$\bar{Z} = Z$$

$Z$  مجموعة مفتوحة ومغلقة

$Z$  مغلق لأن كل نقطة في  $Z$  هي نقطة داخلية

المجموعة  $P \cup Q$

$$(P \cup Q)^\circ = \emptyset$$

$$\overline{(P \cup Q)} = \mathbb{R}$$

$$(P \cup Q)' = \mathbb{R}$$

$$Ext(P \cup Q) = \emptyset$$

$$F_r(P \cup Q) = \mathbb{R}$$

في أي مغلق مغلق مغلق

$$A^\circ = A$$

$$A' = \emptyset$$

$$\bar{A} = A$$

$$F_r(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = \emptyset$$

$$Ext(A) = X \setminus \bar{A} = X \setminus A$$

مغلق لأن

كل نقطة في  $A$  هي نقطة داخلية

## الفضاء المترى الجزئي:

ليكن  $(X, d)$  فضاءاً مترياً و  $A$  مجموعة جزئية من  $X$ :

نعرف على  $A$  مافة بواسطة  $d$  حيث مأخذ مقصوره على  $A$  ونرمز له بـ  $d/A$  على النحو التالي:

$$d/A(x, y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in A$$

إذا المجموعة  $A$  مع مقصور المافة  $d/A$  تشكل فضاء مترياً يسمى فضاءاً مترياً جزئياً ونرمز له بالرمز

$$(A, d/A)$$

★ المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي ليست بالضرورة أن تكون مفتوحة في الفضاء الكلي.

## المجموعة المحدودة:

• نسمي المجموعة الجزئية  $A$  من الفضاء المترى  $(X, d)$  مجموعة محدودة إذا أمكن اختيارها في كرة نصف قطرها

عدد محدود أو منته.

$$\delta = \sup \{ d(x, y) : x, y \in A \}$$

• نسمي العدد  $\delta$  سواء كان منتهياً أو غير منتهى حيث:

قطر المجموعة  $A$ ، وبناءً على هذا التعريف تكون المجموعة  $A$  محدودة إذا وفقط إذا كان قطرها عدداً منتهياً.

تعريف:

لتكن  $A, B$  مجموعتين جزئيتين من الفضاء المترى  $(X, d)$  نسمي العدد:

$$d(A, B) = \inf \{ d(a, b) : a \in A, b \in B \}$$

المافة بين المجموعتين  $A, B$ .

## المتاليات:

تعريف ①: ليكن  $(X, d)$  فضاء مترى وليكن  $x_n$  متالية من هذا الفضاء وليكن  $x$  عنصراً ما من  $X$  نقول

عن المتالية  $x_n$  أنها متقاربة من  $x$  في  $X$  إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

تعريف ②: المتالية هي أي حوار  $x$  يؤول كل عنصر المتالية باستثناء عدد منته من العناصر.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

★ إذا كانت  $x_n$  متقاربة من  $x$  فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

## متالية كوشي:

نسمي المتالية  $x_n$  من عناصر الفضاء المترى  $(X, d)$  متالية كوشي «متالية أساسية» إذا تحققت الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n > m > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

## الفضاء المترى التام:

نسمي الفضاء المترى  $(X, d)$  فضاءً تاماً إذا كانت كل متالية كوشي من عناصره متقاربة فيه أي

في الفضاء المترى التام تكون المتالية متقاربة إذا وفقط إذا كانت متالية كوشي.

## التطبيقات المستمرة:

**تعريف [1]:** ليكن  $f$  تطبيقاً من الفضاء المترى  $(X, d)$  إلى الفضاء المترى  $(Y, d')$  :  $(x, d) \rightarrow (y, d')$  وليكن  $x_0 \in X$  نقطة من المنطلق نقول عن التطبيق  $f$  أنه مستمر في النقطة  $x_0$  إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{و} \quad \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

**تعريف [2]:** يكون التطبيق  $f$  مستمراً في النقطة  $x_0$  إذا وفقط إذا كان من أجل أي كرة مفتوحة  $B(f(x_0), \varepsilon)$  توجد كرة مفتوحة  $B(x_0, \delta)$  بحيث:

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

**تعريف [3]:** يكون التطبيق  $f$  مستمراً في النقطة  $x_0$  إذا وفقط إذا كان من أجل أي جوار  $\mathcal{U}$  للنقطة  $f(x_0)$  في  $Y$  يوجد جوار  $\mathcal{U}$  للنقطة  $x_0$  في  $X$  بحيث  $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$ .

★  $f$  مستمر في  $x_0 \Leftrightarrow$  من أجل أي متتالية  $x_n$  متقاربة من  $x_0$  تكون المتتالية  $f(x_n)$  متقاربة من  $f(x_0)$ .

★ التابع  $f$  مستمر إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في  $Y$  هي مجموعة مفتوحة في  $X$ .

★ التابع  $f$  مستمر إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة في  $Y$  هي مجموعة مغلقة في  $X$ .

★  $f$  مستمر  $\Leftrightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  وذلك  $\forall A \subseteq X$ .

## التماثل المستمر:

ليكن  $f$  تطبيقاً من الفضاء المترى  $X$  إلى الفضاء المترى  $Y$  :  $x \rightarrow y$ .

نطلق على  $f$  اسم تماثل مستمر («هومومورفيزم») إذا كان تماثلاً «عاصراً ومتساوياً» ومستمراً مع مأكوره أي إذا تحقق:

①  $f$  تماثل

②  $f$  مستمر

③  $f^{-1}$  مستمر

## التقابل:

يكون التطبيق  $f: X \rightarrow Y$  تماثلاً إذا حقق القضايا التالية:

①  $f$  تماثل مستمر

②  $f$  مستمر ومفتوح

③  $f^{-1}$  مستمر ومغلق

## تغطية (غطاء) الفضاء:

ليكن  $X$  فضاء مترى  $(X, d)$  أسرة من المجموعات الجزئية من  $X$ .

سبحي هذه الأسرة تغطية (غطاء) للفضاء  $X$  إذا كان:

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

★ إذا كانت المجموعات  $U_\alpha$  جميعها مفتوحة فنقول أنه لدينا تغطية مفتوحة للفضاء  $X$ .

★ إذا اجتمعت هذه التغطية على عدد منته من المجموعات التي تشكل بدورها تغطية للفضاء فنقول أنه لدينا تغطية محدودة منتهية.

### الفضاء المتري المترابط:

يسمى الفضاء المتري  $X$  مترابطاً إذا كانت أي نقطة مفتوحة له تحوي على نقطة هرتية منتبهة لهذا الفضاء.

### المجموعة المترابطة:

يسمى المجموعة الجزئية  $A$  من الفضاء المتري  $X$  مجموعة مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي  $A$  مترابطاً.

★ يبرهن أن المجموعة الجزئية  $A \subseteq X$  مجموعة مترابطة إذا وفقط إذا كانت أي نقطة مفتوحة لـ  $A$  تحوي على نقطة هرتية منتبهة لها.

★ كل مجموعة مترابطة في الفضاء المتري هي مجموعة مغلقة ومجموعة لا أن العكس غير صحيح بالحالة العامة.

★ اجتماع عدد منته من المجموعات المترابطة ليس بالضرورة أن تكون مترابطة.

### الفضاءان المتري المترابط:

يسمى الفضاء المتري  $X$  مترابطاً إذا كان لأي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير هاليتين وغير متقاطعتين.

### تقسيم الفضاء (( الفضاءان المتري غير المترابط )):

نقول عن الفضاء أنه غير مترابط إذا وجد فيه مجموعتان مفتوحتان  $A, B$  حيث  $A \neq \emptyset$  و  $B \neq \emptyset$ .

وغير متقاطعتين  $A \cap B = \emptyset$  و  $A \cup B = X$  (أي أن  $A, B$  متامنان) وفي هذه الحالة نقول عن  $A, B$  أنها يشكلان تقسماً للفضاء.

### المجموعة المترابطة:

يسمى المجموعة الجزئية  $Y$  من الفضاء المتري  $X$  مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي  $Y$  مترابطاً.

★ تقاطع مجموعتين مترابطتين ليس بالضرورة أن يكون مجموعة مترابطة.

★ إذا كانت المجموعة مترابطة فإن لصاقتها تكون مترابطة أيضاً ولكن العكس غير صحيح.

### المجموعة المحدبة:

هي المجموعة التي تحوي القطعة المستقيمة العارضة بين أي نقطتين من نقاطها.

★ تعرف القطعة المستقيمة بين نقطتين  $x, y$  بأنها مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة التالية:

$$Z = (1-t)x + ty \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$Z = \alpha x + \beta y \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1 \quad \text{أو}$$

★ كل مجموعة محدبة هي مجموعة مترابطة.

## أهم المبرهنات

1. أثبت أن المجال المفتوح هو مجموعة مفتوحة في الفضاء المترى الحقيقي المألفين.  
ليكن لدينا المجال المفتوح  $(a, b)$  ولنأخذ نقطة كيفية  $c$  من هذا المجال ولنجعل بعدها عن  $a, b$ :

$$d(c, a) = c - a$$

$$d(b, c) = b - c$$

نأخذ أصغر هذين العددين:  $r = \min\{c - a, b - c\}$  فإن الكرة  $B(c, r) \subset (a, b)$

أي أن النقطة  $c$  داخلية وبما أن  $c$  كيفية  $\Leftarrow$  نقاط هذا المجال هي نقاط داخلية فهو مجموعة مفتوحة.

2. أثبت أن تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة:

ليكن  $U_1, U_2, \dots, U_n$  مجموعات مفتوحة وسنثبت أن التقاطع  $U = \bigcap_{i=1}^n U_i = U_1 \cap \dots \cap U_n$  هو مجموعة مفتوحة.

لنأخذ نقطة كيفية من هذا التقاطع:  $x \in U \Rightarrow x \in U_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$

و باعتبارها مفتوحة  $\Leftarrow x$  نقطة داخلية في كل من هذه المجموعات.

هذا يعني أنه من أجل أي  $\epsilon$  يوجد  $r_i$  حيث يكون:  $B(x, r_i) \subseteq U_i$

نضع  $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n)$  عندها يكون:

$$B(x, r) \subseteq U_i \quad \forall i \Rightarrow B(x, r) \subseteq U$$

أي أن النقطة  $x$  داخلية في التقاطع أي أن كل نقاط التقاطع داخلية أي أن التقاطع مجموعة مفتوحة.

3. أثبت أنه من أجل أي مجموعة جزئية  $A$  من فضاء مترى  $X$  تحقق العلاقة:

$$\bar{A} = \overline{A \cup A'}$$

$$A \subseteq \bar{A} \quad A' \subseteq \bar{A} \quad \Leftarrow \quad A' \cup A \subseteq \bar{A} \quad \text{--- ①}$$

ومن جهة ثانية لنفرض أن  $x \in \bar{A}$  منبأ احتمالان:

$$\text{④} \quad x \in A \quad \text{عندما} \quad x = A \cup A'$$

$$\text{⑤} \quad x \notin A \quad \text{عندما} \quad x \in A' \quad \Leftarrow \quad x \in A' \cup A$$

$$\bar{A} \subseteq A' \cup A \quad \text{--- ②}$$

$$\bar{A} = A' \cup A \quad \text{من ① و ② نجد}$$

4. ليكن  $A, B$  مجموعتين جزئيتين من الفضاء المترى  $X$  اثبت أن:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  في اثبت صحة العلاقة:

$$\text{Ext}(A \cup B) = \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B)$$

$$A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \quad \Leftarrow \quad \text{لدينا دوماً } A \subseteq \bar{A} \text{ و } B \subseteq \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \quad \text{بأخذ لصاقة الطرفين:} \quad \text{Ext}(A \cup B) = X \setminus \overline{A \cup B}$$

$$= X \setminus (\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$= (X \setminus \bar{A}) \cap (X \setminus \bar{B})$$

$$= \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B)$$

من جهة ثانية لدينا دوماً:  $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$  و  $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$  أي:

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \quad \text{--- ③}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{من ② و ③ نجد}$$

[5] اثبت أن المجموعة الجزئية  $A$  من الفضاء المترى  $X$  تكون مغلقة إذا كانت أي متتالية متقاربة من عناصر  $A$  متقاربة من عناصر  $A$ .

لنرمز الشرط: لنأخذ متتالية  $x_n$  من عناصر  $A$  متقاربة من  $x$  ولنثبت أن  $x \in A$ .

$$x \in \bar{A} = A \iff x \text{ نقطة لاصقة لـ } A$$

كفاية الشرط: لنفرض أن  $A$  مجموعة مغلقة و  $x$  نقطة لاصقة كيفية في  $A$  فإنه يوجد متتالية  $x_n$  من عناصر  $A$  متقاربة من  $x$  حسب الفرض

$$\Rightarrow x \in \bar{A} = A \Rightarrow \bar{A} \subseteq A$$

[6] ليكن  $X$  فضاء مترى و  $A$  مجموعة جزئية من  $X$  و  $x$  نقطة من هذا الفضاء.

اثبت أن  $x$  تكون نقطة تراكم للمجموعة  $A$  إذا وفقط إذا وجدت متتالية من عناصر  $A$  متقاربة من  $x$ .

لنرمز الشرط: نفرض أن  $x$  نقطة تراكم هذا يعني أن أي حوار للنقطة  $x$  يتقاطع مع  $A \setminus \{x\}$  و

كألة خاصة تأخذ الكرة التي مركزها  $x$  ونصف قطرها  $\frac{1}{n}$  حيث  $B(x, \frac{1}{n})$  يتقاطع مع  $A \setminus \{x\}$ :

$$B(x, \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

$$n=1 \Rightarrow B(x, 1) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

تأخذ نقطة كيفية من هذا التقاطع وليكن  $x_1$ .

$$n=2 \Rightarrow B(x, \frac{1}{2}) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

تأخذ نقطة كيفية من هذا التقاطع وليكن  $x_2$  وهكذا  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

إن المتتالية  $x_n$  من عناصر  $A \setminus \{x\}$  متقاربة من  $x$ .

$$\Rightarrow d(x_n, x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

كفاية الشرط: نفرض أنه يوجد متتالية وليكن  $x_n$  من عناصر  $A \setminus \{x\}$  متقاربة من  $x$  أي أن أي حوار للنقطة  $x$  يغطي جميع حدود المتتالية اعتباراً من حد ما أي أن أي حوار لـ  $x$  يتقاطع مع  $A \setminus \{x\}$  أي أن  $x$  نقطة تراكم.

[7] ليكن  $X$  فضاء مترى و  $A$  مجموعة جزئية من  $X$  و  $x$  نقطة من هذا الفضاء.

اثبت أن  $x$  تكون نقطة لاصقة للمجموعة  $A$  إذا وفقط إذا وجدت متتالية من عناصر  $A$  متقاربة من  $x$ .

لنرمز الشرط:  $x$  نقطة لاصقة وهذا يعني أن  $x \in \bar{A}$  وهناك احتمالان:

①  $x \notin A$  فإن  $x$  نقطة تراكم أي  $x \in A'$  أي توجد متتالية من عناصر  $A \setminus \{x\}$  متقاربة من  $x$  ولكن  $A \setminus \{x\} = A$  لأن  $x \notin A$ .

②  $x \in A$  فإنه يوجد متتالية ثابتة جميع عناصرها  $x$  وليكن متتالية من عناصر  $A$  متقاربة من  $x$ .

كفاية الشرط: نفرض أنه توجد متتالية من عناصر  $A$  متقاربة من  $x$  فإنه أي حوار للنقطة  $x$  يتقاطع مع  $A$  أي يغطي جميع حدود المتتالية اعتباراً من حد ما أي يتقاطع مع  $A$  فإن  $x$  نقطة لاصقة.

8) ليكن  $X$  فضاء مترى تام و  $A$  فضاء جزئي منه :

اثبت أن الفضاء الجزئي  $A$  يكون تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة  $A$  مغلقة في  $X$ .

لنقوم الشرط : لنفرض أن الفضاء الجزئي  $A$  تام والمطلوب إثباته أن  $A$  مغلقة :

نأخذ نقطة كيفية لاصقة  $x \in \bar{A}$  فإنه توجد متتالية  $x_n$  من عناصر  $A$  متقاربة من  $x$  وبما أن كل متتالية

متقاربة هي متتالية كوشي  $\Rightarrow x_n$  متتالية كوشي في الفضاء الجزئي  $A$  وبما أن  $A$  تام بالفرض  $\Leftarrow$

كل متتالية كوشي متقاربة فيه أي تقارب إلى نقطة من نقاطه.

كفاية الشرط : نفرض أن  $A$  مغلقة ونثبت أن الفضاء الجزئي  $A$  تام

لنأخذ متتالية كوشي كيفية  $x_n$  من الفضاء  $A$  وبما أن  $A$  تام من  $x$  فإن المتتالية  $x_n$  هذه هي متتالية كوشي

في الفضاء  $X$  الذي هو بالفرض تام وبالتالي فهي متقاربة من عنصر ما  $x$  ويكون  $x$

فإن  $x$  نقطة لاصقة لـ  $A$  وبما أن  $A$  بالفرض مغلقة  $\Leftarrow x \in A$  فالفضاء الجزئي  $A$  تام

9) ليكن  $f: X \rightarrow Y$  تطبيقاً من الفضاء المترى  $X$  إلى الفضاء المترى  $Y$  أثبت تكافؤ القضايا التالية :

①  $f$  مستمر

② الصورة العكسية مغلقة و  $f$  لأي مجموعة مغلقة في  $Y$  هي مجموعة مغلقة في  $X$ .

③ الصورة العكسية مفتوحة و  $f$  لأي مجموعة مفتوحة في  $Y$  هي مجموعة مفتوحة في  $X$ .

من ① ينشئ ② :  $f$  مستمر و  $U$  مجموعة مغلقة كيفية في  $Y$  ونثبت أن صورتها العكسية  $f^{-1}(U) = A$  مغلقة في  $X$ .

بما أن  $f$  مستمر فإن المتتالية  $(f(x_n))$  متقاربة من  $f(x)$  ومن نفس البرهنة فإن  $f(x)$  نقطة لاصقة بـ  $U$

وبما أن  $x$  مغلقة فإن :  $f(x) \in U \Rightarrow x \in f^{-1}(U) = A$

فإذاً :  $\bar{A} = A$  فهي مغلقة.

من ② ينشئ ③ : ليكن لدينا  $G$  مجموعة مفتوحة كيفية في  $Y$  ونثبت أن صورتها العكسية مفتوحة في  $X$ .

بما أن  $G$  مفتوحة في  $Y$  فإن متممها  $G^c$  مغلقة في  $Y$  ولدينا بالفرض  $f^{-1}(G^c)$  مغلقة في  $X$  وبما أن

$$f^{-1}(Y \setminus G) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(G) = X \setminus f^{-1}(G)$$

ولدينا  $X \setminus f^{-1}(G)$  مغلقة في  $X$  فإن  $f^{-1}(G)$  مفتوحة في  $X$ .

من ③ ينشئ ① : ليكن لدينا نقطة كيفية  $x \in X$  و  $U$  حوار كيفية لـ  $f(x)$  في  $Y$  ونثبت أن  $f$  مستمر :

حيث تعريف الحوار  $\Rightarrow$  التعريف العام لا يوجد مجموعة مفتوحة  $G$  مفتوحة في  $Y$  بحيث  $f(x) \in G \subseteq U$

$$x \in f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(U)$$

ولدينا بالفرض أن  $f^{-1}(G)$  مفتوحة فإن  $f^{-1}(G)$  حواراً لـ  $x$  أي أن  $f$  مستمر وبما أن  $x$  كيفية فينبغي المطلوب

15) ليكن  $f: X \rightarrow Y$  تطبيقاً مستمراً من الفضاء المترام  $X$  إلى الفضاء المترام  $Y$ . أثبت أن  $f(X)$  مجموعة مترامية.

~~نريد إثبات أن  $f(X)$  مجموعة مترامية~~ لنأخذ نقطة مفتوحة كيفية  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  للمجموعة  $f(X)$  حيث

$$f(x) \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \quad \text{بأخذ الصورة العكسية واستخدم خواصها جيداً}$$

$$X = f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$$

بما أن التقييم  $f$  مستمر فإن الصورة وفقه لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

إذاً جميع هذه المجموعات مفتوحة وإجمالاً فهي  $X$  إذاً هي نقطة مفتوحة  $X$  وبما أن  $X$  مترام

فإن هذه النقطة تحتوي على نقطة مترامية متشعبة وليكن  $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}$  حيث

$$f(x) \in U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \quad \text{وبأخذ الصورة المباشرة جيداً:} \quad x \in \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})$$

وبهذا نكون أثبتنا أن النقطة المفتوحة كيفية  $f(x)$  هي نقطة مترامية متشعبة. فإن  $f(X)$  مترامية.

16) ليكن  $X$  فضاء مترام غير مترابط نفسه المجموعتان  $A, B$  وليكن  $G$  مجموعة مترامية مترابطة في  $X$  أثبت أن  $G$  تكون محتواة بالكامل إما في  $A$  أو في  $B$ .

لفرض عدلاً أن  $G$  تحتوي نقاط من  $A$  ومن  $B$  هذا يعني أن  $A \cap G \neq \emptyset$  و  $B \cap G \neq \emptyset$

بما أن  $A$  مفتوحة في  $X$  فإن  $A \cap G$  مفتوحة في الفضاء الجزئي  $G$  وبالمثل  $B \cap G$  مفتوحة

$$\text{كما أن:} \quad (A \cap G) \cap (B \cap G) = (A \cap B) \cap G = \emptyset \cap G = \emptyset$$

لها غير متقاطعتين في  $G$  ولدينا:

$$(A \cap G) \cup (B \cap G) = (A \cup B) \cap G = X \cap G = G$$

وهكذا وجدنا أن المجموعتين  $A \cap G$  و  $B \cap G$  تشكلان تقسيماً للفضاء الجزئي  $G$  مما يؤدي

إلى أن المجموعة  $G$  غير مترابطة وهذا يناقض الفرض عدلاً أي  $G$  لا تحتوي نقاط من  $A$

و  $B$  و  $G$  محتواة بالكامل إما في  $A$  أو في  $B$ .

17) متى يكون إجماع مجموعتين مترابطتين مجموعة مترابطة بالتأكيد.

إذا كانت  $C_\alpha$  أسرة من المجموعات المترابطة بحيث  $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$  مترابط عندئذ يكون  $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$  مترابطاً

18) علل أن المجموعة المحدبة في الفضاء الإقليدي هي مجموعة مترابطة.

كل مجموعة محدبة هي مجموعة مترابطة لأن كل نقطتين من نقاطها محتوران في مجموعة جزئية

مترابطة هي المقطعة الواصلة بينهما والعكس غير صحيح بالمرة العامة.

14) أثبت أن الفضاء مجموعتين مترابطتين في فضاء مترى هو مجموعة مترابطة.


لا تفطية مفتوحة كيفية  $A \cup B \Leftarrow$

$U_1$  تفطية  $A \Leftarrow \begin{cases} A \\ B \end{cases}$  مترابطة بالفرض إذن لها تفطية مترتبة  
 $U_2$  تفطية  $B \Leftarrow$  مترابطة بالفرض إذن لها تفطية مترتبة

إذن  $U_1$  و  $U_2$  تفطية مترتبة  $A \cup B$

فالاختتام  $A \cup B$  هو مجموعة مترابطة.

15) أعط مثالاً على مجموعتين مترابطتين اجتماعها ليس مجموعة مترابطة.

 من الدرجة التقاطع في نقطتين فقط.

16) أثبت أن المجموعة المترتبة في فضاء مترى تكون محدودة.

نأخذ المجموعة المترتبة  $x_1, x_2, \dots, x_n$  من الفضاء المترى  $(X, d)$  وليكن  $r$  عدد حقيقي موجب

حيث  $x_1$  عن باقي نقاط المجموعة  $d(x_1, x_i) < r$   $i = 1, 2, \dots, n$

نأخذ أسرة الكرات المفتوحة التي مركزها  $x_1$  ونصف قطرها  $x_i$

فيكون  $r = \max d(x_1, x_i)$

أي أن المجموعة محدودة.

17) ليكن  $(X, d)$  الفضاء المترى المنقطع :

① ما هي المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة في هذا الفضاء

② عين كرة مفتوحة وكرة مغلقة مركزها من النقطة  $x$  ونصف قطرها  $r$

③ أثبت أن الفضاء تام.

① كل مجموعات هذا الفضاء مفتوحة وكل المجموعات مغلقة.

②  $B(x, r) = \{x\}$  مفتوحة

$\bar{B}(x, r) = X$  مغلقة

③ ليكن  $x_n$  متتالية كوشي كيفية في هذا الفضاء فبحسب التعريف

$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : \forall n, m > n_0 : d(x_n, x_m) < \epsilon$

لنأخذ  $\epsilon = 1$

من أجل هذا  $1 \leq \epsilon$  فإن  $d(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow d(x_n, x_m) = 0$

$\Rightarrow x_n = x_m \quad \forall n, m > n_0$

وهذا يعني أن المتتالية ثابتة «اعتباراً من حيثها» والمتتالية الثابتة دورياً متقاربة.

وبالتالي هذا الفضاء تام.

للمزيد من الفائدة ...

ابقوا على تواصل معنا

على صفحاتكم على الفيسبوك :

طلاب قسم الرياضيات في جامعة البعث بحمص

[www.facebook.com/AlbaathUnMath](http://www.facebook.com/AlbaathUnMath)

وفي المجموعة الرديفة للصفحة على الرابط

[www.facebook.com/groups/math.sy](http://www.facebook.com/groups/math.sy)

# طبولوجيا 1

ملخص للنظري واهم المبرهنات وحل بعض أسئلة الدورات

هذا العمل لمقرر عام 2014

وهو من كتابة الزميل حسن قطعان " له كل التحية "

وقام بتحويله لكتاب الكتروني وتصميمه الزميل ابراهيم الخضر